協力ファジィゲームにおけるShapley関数の公理について (不確実性の下での数理モデルの構築と最適化)

AUTHOR(S):

鶴見, 昌代; 谷野, 哲三; 乾口, 雅弘

数理解析研究所講究録
1194 巻 2001 年 156-164

協力ファジィゲームにおける Shapley 関数の公理について*

大阪大学大学院工学研究科
鶴見 昌代 (Masayo Tsurumi) 谷野 哲三 (Tetsuzo Tanino)
乾口 雅弘 (Masahiro Inuiguchi)
Graduate School of Engineering,
Osaka Univ.

1 はじめに

部分的な協力をするプレイヤーを含む提携は，Aubin によって提案されたファジィ提携と呼ばれる概念 [1, 2, 3] によって取り扱うことができる．ファジィ提携とは，ある提携に代表権 (representability) [4] の一部を委譲したプレイヤーの集合である．ファジィ提携は，メンバシップ関数と同一視することができ，このときの各メンバシップ値は，各プレイヤーがどの程度代表権を委譲したのかを表し，協力の度合い (rate of participation) [1, 2, 3] と呼ばれる．また，ファジィ提携に基づく協力ゲームは協力ファジィゲーム，あるいは単にファジィゲームと呼ばれる．Aubin は，ある協力関係が生じたときに，そのファジィ部分提携の利益を考慮することによって得られる利益分配についての議論を行った．

Butnariu [5] は，各ファジィゲームに対し，各ファジィ提携から Shapley 値を導く関数を割り当てる関数を Shapley 関数と定義した．ここで得られる Shapley 値は，ファジィ提携が成立した場合の利益分配となっており，この点において Aubin の研究とは異なっている．Butnariu は，あるファジィゲームのクラス上の Shapley 関数を一意に与えた．しかし，このクラスは，要素となるファジィゲームのほとんどがプレイヤーの参加度に関して単調非減少でもなく連続でもないということから，自然とは言えなかった．しかも，Butnariu の与えた公理は，いくつかの点において自然とは言えなかった．

また，近年，multi-choice cooperative game [8, 10, 11]，continuously-many-choice cooperative games [9] という協力ゲームも提案されている．これらのゲームでは，各プレイヤーが有限個あるいは無限個の行動のレベルを持つような状況を取り扱っている．この行動のレベルはファジィゲームにおける協力の度合いに対応するものとみなせるかもしれないが，提案されている解概念は，各ファジィ提携が生じたときの解概念を与えるものではない．この点において Butnariu のファジィゲームに関する研究とは異なっている．

また，N の部分提携が生じた場合の利益配分を統合的に扱う研究には，Sprumont [12] によるものもあるが，これは，ファジィゲームではない通常のゲームについてのものである．

我々は，これまで [14, 15]，Shapley 値に関する概念をファジィゲームに拡張し，Shapley 値を与える Shapley 関数を公理的に提案しなおした．また，Shapley 関数を陽に与えるために，自然なクラスを提案し，ある関数がそのクラス上の Shapley 関数となることを示し，その関数の性質を明らかにした．また，解概念の一つであるコアや優越コアの概念もファジィゲームに拡張し，Shapley 値との関係などの性質を明らかにした．

本論文では，協力ファジィゲームにおける Shapley 値の公理について取り扱う．まず，提案したクラス上の Shapley 関数の一意性を示す．このことによって，Shapley 関数の

*この研究は，日本学術振興会特別研究員奨励費による援助を受けています．

公理化を行えたことになる．また，Shapley 関数と同値な関数を導く．強単調性という概念をファジィゲームに拡張し，提案したクラス上の Shapley 関数から導かれる解は強単調となることを確認する．最後に，提案したクラス上の Shapley 関数が，効率性，対称性，強単調性を満たす唯一の関数であることを示す．このことによって，提案したファジィゲームのクラス上の Shapley 関数について，もう一つの公理化を行うことができる．

2 Shapley 関数とファジィゲームのクラス $G_C(N)$

プレイヤーの集合を $N=\{1,\ldots,n\}$ とする．ファジィ提携とは，N のファジィ部分集合であり，N から $[0,1]$ への関数と同一視できる．このとき，ファジィ提携 S とプレイヤー i に対して，$S(i)$ は S の中での i のメンバシップ値，すなわち S におけるプレイヤー i の参加度を表す．ファジィ提携 S に対して，レベル集合を任意の $h\in[0,1]$ に対して $[S]_h=\{i\in N\mid S(i)\geq h\}$ で表し，サポートを $\mathrm{Supp}\,S=\{i\in N\mid S(i)>0\}$ によって表す．ファジィ集合 $U\subseteq N$ のすべてのファジィ部分集合のクラスを $L(U)$ と書く．とくに，$P(W)$ は，クリスプ集合 $W\subseteq N$ のすべてのクリスプ部分集合の集合を表すものとする．

$v(\emptyset)=0$ を満たす関数 $v: L(N)\to\mathbb{R}_+=\{r\in\mathbb{R}\mid r\geq 0\}$ をファジィゲームと呼び，$G(N)$ ですべてのファジィゲームの集合を表す．$v(\emptyset)=0$ を満たす関数 $v: P(N)\to\mathbb{R}_+$ をクリスプゲームとよび，クリスプゲームすべての集合を $G_0(N)$ で表す．

任意の $v\in G_0(N)$ は，優加法的であるものとする．このことと，v の値域が非負の実数の集合であることから，$v\in G_0(N)$ は集合の包含に関して単調非減少であることがいえる．

また，二つのファジィ集合の和集合と共通集合を通常のように定義する．すなわち，つぎのように定義する．

$$(S\cup T)(i)=\max\{S(i),T(i)\},\qquad \forall\, i\in N,$$
$$(S\cap T)(i)=\min\{S(i),T(i)\},\qquad \forall\, i\in N.$$

$G_0(N)$ 上の Shapley 関数を考えるために，通常の担体の定義に基づき，ゲーム $v\in G_0(N)$ に対する提携 $W\in P(N)$ における担体の定義を行う．

定義 1 *[14]* $v\in G_0(N)$，$W\in P(N)$ とする．次式が成り立つとき，$S\in P(W)$ をゲーム v に対する W における担体とよぶ．

$$v(S\cap T)=v(T),\quad \forall\, T\in P(W).$$

ゲーム v に対する W におけるすべての担体の集合を $C(W\mid v)$ と書く．すなわち，以下のように定義する．

$$C(W\mid v)=\{S\in P(W)\mid v(S\cap T)=v(T),\quad \forall\, T\in P(W)\}.$$

この定義を用いた $G_0(N)$ 上の Shapley 関数の公理的な定義を紹介する．

定義 2 *[14]* つぎの *4* つの公理を満たすとき，関数 $f': G_0(N)\to(\mathbb{R}^n_+)^{P(N)}$ を $G_0(N)$ 上の *Shapley* 関数と呼ぶ．

公理 C_1: $v \in G_0(N)$，$W \in P(N)$ ならば，つぎが成り立つ．

$$\begin{cases} \sum_{i \in N} f'_i(v)(W) = v(W), \\ f'_i(v)(W) = 0, \quad \forall i \notin W. \end{cases}$$

ただし $f'_i(v)(W)$ は $f'(v)(W) \in \mathbb{R}^n$ の i 番目の要素である．

公理 C_2: $v \in G_0(N), W \in P(N)$，$T \in C(W \mid v)$ ならば，つぎが成り立つ．

$$f'_i(v)(W) = f'_i(v)(T), \quad \forall i \in N.$$

公理 C_3: $v \in G_0(N)$，$W \in P(N), i, j \in W$ であり，かつ任意の $S \in P(W \backslash \{i, j\})$ に対して $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ ならば，つぎが成り立つ．

$$f'_i(v)(W) = f'_j(v)(W).$$

公理 C_4: $v_1, v_2 \in G_0(N)$ に対して，$v_1 + v_2 \in G_0(N)$ を任意の $S \in P(N)$ に対して $(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$ と定義する．このとき，v_1, $v_2 \in G_0(N)$，$W \in P(N)$ ならばつぎが成り立つ．

$$f'_i(v_1 + v_2)(W) = f'_i(v_1)(W) + f'_i(v_2)(W), \quad \forall i \in N.$$

ここで，f' をつぎのように定義する．

$$f'_i(v)(W) = \begin{cases} \sum_{T \in P_i(W)} \beta(|T|; |W|) \cdot \{v(T) - v(T \backslash \{i\})\}, & i \in W \text{ のとき}, \\ 0, & \text{それ以外}, \end{cases}$$

ただし $P_i(W) = \{T \in P(W) \mid T \ni i\}$，$\beta(|T|; |W|) = (|T| - 1)! \cdot (|W| - |T|)!/|W|!$ である．このとき，f' は唯一の $G_0(N)$ 上の Shapley 関数である [14]．また，担体の拡張として，ファジィゲームに対するファジィ提携における f- 担体を定義する．

定義 3 *[14]* $v \in G(N)$ とし，$U \in L(N)$ とする．つぎが成り立つとき，$S \in L(U)$ をファジィゲーム v に対するファジィ提携 U の f- 担体とよぶ．

$$v(S \cap T) = v(T), \quad \forall T \in L(U).$$

ファジィゲーム v に対するファジィ提携 U の f- 担体のすべての集合を $FC(U \mid v)$ とかく．

ファジィゲームのクラス上の Shapley 関数を定義するため，つぎの表記を導入する．$U \in L(N)$，$i, j \in N$ とする．任意の $S \in L(U)$ に対して，$S^U_{ij} \in L(U)$ をつぎで定義する．

$$S^U_{ij}(k) = \begin{cases} \min\{S(i), U(j)\}, & k = i \text{ のとき}, \\ \min\{S(j), U(i)\}, & k = j \text{ のとき}, \\ S(k), & \text{それ以外}. \end{cases}$$

また，任意の $S \in L(N)$ に対して $\mathcal{P}_{ij}[S]$ をつぎのように定義する．

$$\mathcal{P}_{ij}[S](k) = \begin{cases} S(j), & k = i \text{ のとき}, \\ S(i), & k = j \text{ のとき}, \\ S(k), & \text{それ以外}. \end{cases}$$

明らかに，$S_{ij}^U, \mathcal{P}_{ij}[S_{ij}^U] \in L(U)$ が成り立つ．ここで，ファジィゲームのクラス上の Shapley 関数の定義を紹介する．

定義 4 *[14]* $G'(N) \subseteq G(N)$ とする．つぎの *4* つの公理を満たすとき，関数 $f: G'(N) \to (\mathbb{R}_+^n)^{L(N)}$ を $G'(N)$ 上の *Shapley* 関数と呼ぶ．

公理 F_1: $v \in G'(N)$，$U \in L(N)$ ならば，つぎが成り立つ．

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i \in N} f_i(v)(U) = v(U), \\ f_i(v)(U) = 0, \quad \forall\, i \notin \mathrm{Supp}\ U. \end{cases}$$

ただし，$f_i(v)(U)$ は $f(v)(U) \in \mathbb{R}_+^n$ の i 番目の要素である．

公理 F_2: $v \in G'(N), U \in L(N), T \in FC(U \mid v)$ ならば，つぎが成り立つ．

$$f_i(v)(U) = f_i(v)(T), \quad \forall\, i \in N.$$

公理 F_3: $v \in G'(N), U \in L(N), U_{ij}^U \in FC(U \mid v)$ であり，かつ任意の $S \in L(U_{ij}^U)$ に対して $v(S) = v(\mathcal{P}_{ij}[S])$ ならば，つぎが成り立つ．

$$f_i(v)(U) = f_j(v)(U).$$

公理 F_4: $v_1, v_2 \in G'(N)$ に対し，ゲーム $v_1 + v_2$ を任意の $S \in L(N)$ に対して $(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$ によって定義する．このとき，$v_1 + v_2 \in G'(N)$ かつ $U \in L(N)$ ならば，つぎが成り立つ．

$$f_i(v_1 + v_2)(U) = f_i(v_1)(U) + f_i(v_2)(U), \quad \forall\, i \in N.$$

この定義はどんなファジィゲームのクラスに対しても適用できる．しかし，ファジィゲームのすべてを含むクラス上の Shapley 関数を陽に与えることは難しい．そこで，つぎのクラスを導入し，導入したクラス上の Shapley 関数を陽に与えることを考える．

定義 5 *[14]* $S \in L(N)$ に対して，$Q(S) = \{S(i) \mid S(i) > 0,\ i \in N\}$ と書き，$Q(S)$ の濃度を $q(S)$ と書く．$Q(S)$ の要素を大きさの小さい順に $h_1 < \cdots < h_{q(S)}$ と書く．任意の $S \in L(N)$ に対してつぎが成り立つとき，またそのときに限り，ゲーム $v \in G(N)$ を *Choquet* 積分形のファジィゲームと呼ぶ．

$$v(S) = \sum_{l=1}^{q(S)} v([S]_{h_l}) \cdot (h_l - h_{l-1}), \tag{1}$$

ただし，$h_0 = 0$ とする．*Choquet* 積分形のファジィゲームすべての集合を $G_C(N)$ と書く．

(1) が関数 S の v に関する Choquet 積分 [6, 7, 13] であることは明らかである．また，通常のゲーム，すなわちクリスプゲームと Choquet 積分形のファジィゲームは 1 対 1 に対応する．簡単のため，混乱の恐れがない場合には，クリスプゲームと対応する Choquet 積分形のファジィゲームを同じ v を用いて表す．また，このクラスは，プレイヤーの提携への参加度に関して単調非減少で，かつ連続であるという性質をもつ [14]．この点において，自然であると考えられる．

関数 $f : G_C(N) \to (\mathbb{R}^n_+)^{L(N)}$ を定義する．

$$f_i(v)(U) = \sum_{l=1}^{q(U)} f'_i(v)([U]_{h_l}) \cdot (h_l - h_{l-1}), \tag{2}$$

このとき，つぎの定理が成り立つ．

定理 1 *[14] f' が $G_0(N)$ 上の Shapley 関数であるならば，(2) で定義される f は G_C 上の Shapley 関数である．*

証明. [14] において，$k = 1, 2, 3, 4$ に対して，f' が 公理 C_k を満たすとき，f が 公理 F_k を満たすことを示すことにより証明した． □

3 Shapley 関数の一意性

まず，(2) で定義した関数が唯一の Shapley 関数であることを示すために，いくつかの補題を導入する．

補題 1 $v_1, v_2 \in G_C(N)$ とする．このとき，つぎが成り立つ．

$$\begin{aligned} & v_1(S) \geq v_2(S), \quad \forall\, S \in L(U), \\ \iff\ & v_1(T) \geq v_2(T), \quad \forall\, T \in P(\text{Supp } U) \end{aligned}$$

証明. $G_C(N)$ の定義から，任意の $T \in P(\text{Supp } U)$ に対して $v_1(T) \geq v_2(T)$ ならば，任意の $S \in L(U)$ に対して $v_1(S) \geq v_2(S)$ が成り立つ．したがって，これとは逆の関係を示せばよい．任意の $S \in L(U)$ に対して $v_1(S) \geq v_2(S)$ を仮定し，$0 < h' \leq \min_{j \in \text{Supp } U} U(j)$ とする．このとき，$\{[S]_{h'} \mid S \in L(U), S(i) \in \{h', 0\}, \forall i \in \text{Supp } U\} = P(\text{Supp } U)$ が成り立つ．このことから，つぎの関係が導かれる．

$$\begin{aligned} & v_1(S) \geq v_2(S), && \forall\, S \in L(U), \\ \Longrightarrow\ & v_1(S) \geq v_2(S), && \forall\, S \in L(U), \text{ s.t. } S(i) \in \{h', 0\}, \\ \iff\ & v_1([S]_{h'}) \cdot h' \geq v_2([S]_{h'}) \cdot h', && \forall\, S \in L(U), \text{ s.t. } S(i) \in \{h', 0\}, \\ \iff\ & v_1([S]_{h'}) \geq v_2([S]_{h'}), && \forall\, S \in L(U), \text{ s.t. } S(i) \in \{h', 0\}, \\ \iff\ & v_1(T) \geq v_2(T), && \forall\, T \in P(\text{Supp } U). \end{aligned}$$

□

補題 1 から，$v_1, v_2 \in G_C(N)$ のとき，つぎが成り立つことも明らかである．

$$\begin{aligned} & v_1(S) = v_2(S), \quad \forall\, S \in L(U), \\ \iff\ & v_1(T) = v_2(T), \quad \forall\, T \in P(\text{Supp } U) \end{aligned}$$

補題 2 任意の対応するゲームの組 $(v, v) \in G_0 \times G_C$ と任意の $W \in P(N)$ に対して，$C(W \mid v) \subseteq FC(W \mid v)$ が成り立つ．

証明. 補題 1 を用いると，任意の $T \in P(W)$ に対して $v(T \cap S) = v(T)$ が成り立つことが，任意の $T \in L(W)$ に対して $v(T \cap S) = v(T)$ が成り立つことの必要十分条件であることがわかる．したがって，つぎのことが得られる．

$$\begin{aligned} C(W \mid v) &= \{S \in P(W) \mid v(T \cap S) = v(T), \quad \forall T \in P(W)\} \\ &= \{S \in P(W) \mid v(T \cap S) = v(T), \quad \forall T \in L(W)\} \\ &\subseteq \{S \in L(W) \mid v(T \cap S) = v(T), \quad \forall T \in L(W)\} \\ &= FC(W \mid v). \end{aligned}$$

□

補題 3 任意の $k = 1, 2, 3, 4$ に対して，f' が 公理 C_k を満たすとき，またそのときに限り，f は 公理 F_k を満たす．

証明. 定理 1 の証明から，$k = 1, 2, 3, 4$ に対して f が 公理 F_k を満たすとき f' が 公理 C_k を満たすことを示せばよい．明らかに，$P(N) \subseteq L(N)$ であり，また任意の対応するゲームの組 $(v, v) \in G_0 \times G_C$ と任意の $W \in P(N)$ に対して $f_i'(v)(W) = f_i(v)(W)$ が成り立つ．また，補題 2 より，任意の対応するゲームの組 $(v, v) \in G_0 \times G_C$ と任意の $W \in P(N)$ に対して $C(W \mid v) \subseteq FC(W \mid v)$ が成り立つ．さらに，任意の $S \in P(W \backslash \{i, j\})$ に対して $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ が成り立つことが，任意の $S \in P(W)$ に対して $v(S) = v(\mathcal{P}_{ij}[S])$ が成り立つための必要十分条件であることも明らかである．補題 1 から，任意の $S \in P(W)$ に対して $v(S) = v(\mathcal{P}_{ij}[S])$ が成り立つことが，任意の $S \in L(W)$ に対して $v(S) = v(\mathcal{P}_{ij}[S])$ が成り立つための必要十分条件であることもわかる．以上から，$k = 1, 2, 3, 4$ に対して f が 公理 F_k を満たすとき f' が 公理 C_k を満たすことがいえる．よって，証明された．□

定理 2 *(2)* で定義される関数 f は，$G_C(N)$ 上の唯一の *Shapley* 関数である．すなわち，f は公理 F_1, F_2, F_3, F_4 を満たす唯一の関数である．

証明. [14] の 定義 1 より，f' は C_1, C_2, C_3，C_4 を満たす唯一の関数である．また，前節でも指摘したとおり，G_0 と G_C については，それぞれの各要素が 1 対 1 に対応する．さらに，補題 3 から，$k = 1, 2, 3, 4$ に対して f が公理 F_k を満たすことの必要十分条件は，それぞれ f' が公理 C_k を満たすことであり，また，定理 1 から，f は任意の $k = 1, 2, 3, 4$ に対して公理 F_k を満たす．これらのことから，定理が証明される．□

このことによって，Shapley 関数の公理化を完全にしたことになる．

4 $G_C(N)$ 上の Shapley 関数の性質

$v \in G_C(N)$ と $G_C(N)$ 上の Shapley 関数 f について，つぎの注意が成り立つ．

注意 1 $v \in G_C(N)$ とする．$U \in L(N)$ に対して，$0 \leq k_1 < \cdots < k_m \leq 1$ を満たす集合 $\{k_1, \ldots, k_m\} \supseteq Q(U)$ を考える．このとき，$G_C(N)$ 上の *Shapley* 関数 f について，つぎが成り立つ．

$$f_i(v)(U) = \sum_{l=1}^{m} f_i(v)([U]_{k_l}) \cdot (k_l - k_{l-1}), \quad \forall\, i \in N,$$

ただし，$k_0 = 0$ とする．同様に，$S \in L(N)$ に対して，$0 \leq k'_1 < \cdots < k'_{m'} \leq 1$ を満たす集合 $\{k'_1, \ldots, k'_{m'}\} \supseteq Q(S)$ を考えると，つぎが成り立つ．

$$v(S) = \sum_{l=1}^{m'} v([S]_{k'_l}) \cdot (k'_l - k'_{l-1}), \quad \forall\, S \in L(N),$$

ただし，$k'_0 = 0$ とする．

$S \in L(N)$ に対して，$S_{-i} \in L(S)$ をつぎのように定義する．

$$S_{-i}(j) = \begin{cases} 0, & j = i \text{ のとき}, \\ S(j), & \text{それ以外}. \end{cases}$$

さらに $\Delta_i v : L(N) \to \mathbb{R}$ をつぎのように定義する．$\Delta_i v(S) = v(S) - v(S_{-i})$．この定義を用いて，$G_C(N)$ 上の Shapley 関数 f が別の表現で表されることを示す．

定理 3 $L_0(U) = \{T \in L(U) \mid T(j) \in \{0, U(j)\}, \forall j \in N\}$ とする．このとき，$G_C(N)$ 上の *Shapley* 関数 f についてつぎが成り立つ．

$$f_i(v)(U) = \sum_{T \in L_0(U)} \frac{(t-1)! \cdot (u-t)!}{u!} \Delta_i v(T). \tag{3}$$

証明. $Q(U) = \{h_1, h_2, \ldots, h_{q(U)}\}$，ただし $h_1 < h_2 < \cdots < h_{q(U)}$ とする．以下では，$q(U) = |Q(U)|$ に関する数学的帰納法を用いて，(3) が成り立つことを証明する．$q(U) = 0$ のとき，すなわち $U = \emptyset$ のときについては，(3) が成り立つことは明らかである．$q(U) = 1$ の場合は，$\{\mathrm{Supp}\, T \mid T \in L_0(U)\} = P(\mathrm{Supp}\, U)$ であることに注意すると，つぎのように (3) の右辺から左辺が導かれる．

$$\begin{aligned}
& \sum_{T \in L_0(U)} \frac{(t-1)! \cdot (u-t)!}{u!} \Delta_i v(T) \\
= & \sum_{T \in L_0(U)} \frac{(t-1)! \cdot (u-t)!}{u!} \sum_{l : h_l \in Q(T)} \Delta_i v([T]_{h_l}) \cdot (h_l - h_{l-1}) \\
= & \sum_{T \in L_0(U)} \frac{(t-1)! \cdot (u-t)!}{u!} \Delta_i v(\mathrm{Supp}\, T) \cdot h_1 \\
= & \sum_{R \in P(\mathrm{Supp}\, U)} \frac{(r-1)! \cdot (u-r)!}{u!} \Delta_i v(R) \cdot h_1 \\
= & f'_i(v)(\mathrm{Supp}\, U) \cdot h_1 = f_i(v)(U).
\end{aligned}$$

最後に，$q(U)$ が k のときに成り立つことを仮定して，$k+1$ のときに (3) が成り立つことを示す．$q(U)=k+1$ を満たす $U\in L(N)$ に対して，U' をつぎのように定義する．

$$U'(j)=\begin{cases} U(j), & j\in[U]_{h_2}\text{のとき}, \\ 0, & \text{それ以外}. \end{cases}$$

このとき，明らかに $q(U')=k$ が成り立つ．U' に対して (3) が成り立つことを仮定して，U について (3) が成り立つことを示せればよい．注意 1 と帰納法の仮定を用いて，U' に対して (3) が成り立つことを仮定して，U について (3) が成り立つことを示すことができる．このことにより，証明される．□

また，強単調性と呼ばれるゲームにおける解概念の性質をファジィゲームに拡張する．

定義 6 公理 F_5
$v\in G'(N), U\in L(N)$, $i\in \mathrm{Supp}\,U$ とする．このとき，$(\Delta_i v(S))_{S\in L(U)}\geq(\Delta_i w(S))_{S\in L(U)}$ ならば $f_i(v)(U)\geq f_i(w)(U)$ が成り立つ．

定義 3 から明らかに，つぎの注意が得られる．

注意 2 $G_C(N)$ 上の *Shapley* 関数 f は，公理 F_{5-2} を満たす．

この注意を用いて，定理 2 と同様にしてつぎの定理を導くことができる．

定理 4 f は，公理 F_1, F_3, F_5 を満たす $G_C(N)$ 上の唯一の関数である．

証明. 定義 2 と同様に証明することができる．□

このことにより，Shapley 関数の新たな公理化を行うことができた．

5 おわりに

本研究では，提案したクラス上の Shapley 関数の一意性を示し，このことによって，公理化を行うことができた．また，Shapley 関数と同値な関数の表現を導いた．さらに，強単調性という概念をファジィゲームに拡張し，提案したクラス上の Shapley 関数が，効率性，対称性，強単調性を満たす唯一の関数であることを示すことができた．今後は，他の解の性質をファジィゲームに拡張し，他の特徴づけも行いたい．

参考文献

[1] J.-P. Aubin, Coeur et valeur des jeux flous à paiements latéraux, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de 1'Académie des Sciences 279-A (1974) 891–894.

[2] J.-P. Aubin, Coeur et équilibres des jeux flous sans paiements latéraux, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de 1'Académie des Sciences 279-A (1974) 963–966.

[3] J.-P. Aubin, Mathematical Methods of Game and Economic Theory, Rev. ed., North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982.

[4] A. Billot, Fuzzy convexity and peripherial core of an exchange economy represented as a fuzzy game, in: J. Kacprzyk, M. Fedrizzi (Eds.), Multiperson Decision Making Models using Fuzzy Sets and Possibility Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990, pp. 311–335.

[5] D. Butnariu, Stability and Shapley value for an n-persons fuzzy game, Fuzzy Sets and Systems 4 (1980) 63–72.

[6] G. Choquet, Theory of capacities, Annales de I'institut Fourier 5 (1953) 131–295.

[7] M. Grabisch, T. Murofushi, M. Sugeno, Fuzzy measure of fuzzy events defined by fuzzy integrals, Fuzzy Sets and Systems 50 (1992) 293–313.

[8] C.-R. Hsiao, T.E.S. Raghavan, Shapley value for multi-choice cooperative games, I, Games and Economic Behavior 5 (2) (1993) 240–256.

[9] C.-R. Hsiao, A value for continuously-many-choice cooperative games, International Journal of Game Theory 24 (1995) 273–292.

[10] A. van den Nouweland, Chapter 9: Multi-choice games, in: Games and Graphs in Economic Situations, PhD Dissertation Tilburg University, The Netherlands, 1993, pp. 119–148.

[11] A. van den Nouweland, S. Tijs, J. Potters, J. Zarzuelo, Cores and related solution concepts for multi-choice games, ZOR - Mathematical Methods of Operations Research 41 (3) (1995) 289–311.

[12] Y. Sprumont, Population monotonic allocation schemes for cooperative games with transferable utility, Games and Economic Behavior 2 (1990) 378–394.

[13] M. Sugeno, T. Murofushi, Choquet's integral as an integral form for a general class of fuzzy measures, Preprints of Second IFSA Congress 1 (1987) 408–411.

[14] M. Tsurumi, T. Tanino, M. Inuiguchi, The Shapley function on a class of cooperative fuzzy games, European Journal of Operational Research 129 (2001) 596–618.

[15] M. Tsurumi, T. Tanino and M. Inuiguchi, The core and the related solution concepts in cooperative fuzzy games, 日本ファジィ学会誌第12巻1号 (2000) 193–202.